ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ PHƯƠNG THẢO

VỀ BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC TỔ HỢP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN-2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ PHƯƠNG THẢO

VỀ BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC TỔ HỢP

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS. TS. TRỊNH THANH HẢI

THÁI NGUYÊN-2019

Mục lục

Trang

Mở đầu

Từ thời xa xưa vấn đề toán học được ra đời từ rất sớm từ các hoạt động thực tiễn của con người, trong đó có tư duy về hình học tổ hợp, ví dụ: Ở những nước châu Á, trong số đó có Ấn Độ, các nhà toán học Jaina đã nghiên cứu ra dãy số, các dãy cấp số, hoán vị và tổ hợp; Thời Trung Quốc cổ đại, người ta đã biết đến biểu đồ tổ hợp phức còn gọi là "hình vuông thần kì"; Thời kì cổ đại ở Hy Lạp đã có những nhà triết học thông thái đặc biệt là nhà triết học Kxenorat đã biết từ những chữ cái cho trước lập thành bảng chữ số... Nhưng phải đến khoảng thế kỉ XVII – XVIII với những công trình nghiên của như Pascal, Fermat, Euler... thì toán học tổ hợp mới thực sự hình thành như một nhánh của toán học. Toán tổ hợp có tính hấp dẫn, lý thú của toán học nói chung và toán sơ cấp nói riêng. Nội dung của toán tổ hợp phong phú và được ứng dụng nhiều trong thực tế đời sống...

Hình học tổ hợp là một nhánh không thể thiếu toán tổ hợp, là những bài toán hay, thú vị và thường xuyên xuất hiện trong các cuộc thi học sinh giỏi Quốc gia, Olympic toán quốc tế, thi Olympic sinh viên giữa các trường đại học, cao đẳng trong cả nước. Ở Trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên đã có học viên Lê Thị Bình đã làm luận văn Thạc sĩ với đề tài "Các bài toán về hình học tổ hợp" nhưng chưa luận văn đề cập một cách hệ thống đến dạng toán "Cực trị trong hình học tổ hợp". Chính vì với mong muốn tìn hiểu sâu về các toán cực trị trong hình học tổ hợp, em đã chọn đề tài "Các bài toán cực trị hình học tổ hợp" làm đề tài luận văn thạc sĩ của mình.

Mục đích nghiên cứu của luận văn được xác định là: Sưu tầm, nghiên cứu và trình bày một cách có chọn lọc về bài toán cực trị trong hình học tổ hợp để hình thành một tài liệu giảng dạy chuyên đề bồi dưỡng học sinh khá, giỏi.

Nội dung chính của luận văn được trình bày thành hai chương:

Chương 1: Trong chương này, luận văn trình bày một số nguyên lý và phương pháp thường gặp trong các lời giải của bài toán hình học tổ hợp, kèm theo các ví dụ, các bài tập minh họa.

Chương 2: Nội dung chương 2 được dành riêng để trình bày lời giải của một số bài toán cực trị hình học tổ hợp dành cho học sinh khá, giỏi và được sắp xếp theo hai dạng chính là: Bài toán liên quan đến tìm giá trị lớn nhất, tìm giá trị nhỏ nhất trong hình học tổ hợp.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS Trịnh Thanh Hải. Em chân thành cảm ơn thầy Trịnh Thanh Hải đã tận tình hướng dẫn em triển khai đề tài của luận văn này. Em xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè cùng các anh chị đã tạo điều kiện để em hoàn thành đề tài này.

Tuy nhiên điều kiện về năng lực bản thân còn hạn chế, luận văn chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo, bạn bè và đồng nghiệp để bài luận văn của em được hoàn thiện hơn.

Em xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2019

Học viên

Đỗ Phương Thảo

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Tổng quan về bài toán hình học tổ hợp

Trước tiên, luận văn xin nhắc lại một vài dạng toán tổ hợp được trình bày trong luận văn:

(i) Bài toán cực trị tổ hợp:

Dạng 1: Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất (lớn nhất) sao cho mọi tập A mà $| A |= k$ là hữu hạn đều có tính chất T nào đó.

Ví dụ 1.1.1. Gọi A là tập tất cả các số tự nhiên lẻ không chia hết cho 5 và nhỏ hơn 30. Tìm số k nhỏ nhất sao cho mỗi tập con của A gồm k phần tử đều tồn tại hai số chia hết cho nhau?

Ví dụ 1.1.2. Cho tập A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con có k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho $a^2 + b^2$ là số nguyên tố (VMO 2004).

Với bài toán dạng này, chúng ta thường xét một tập A có tính chất đặc biệt nào đó sao cho $| A |= m$ và A không thỏa mãn tính chất T, từ đó suy ra được $k_{\min} > m + 1$. Tiếp theo ta chứng minh mọi tập A mà $| A |= m + 1$ đều có tính chất T, từ đó ta tìm được $k_{\min} = m + 1$. Để chứng minh mọi tập A mà $| A |= m + 1$ đều có tính chất T thì ta có thể sử dụng nguyên lí Dirichlet hoặc dựa vào tính chất tập A.

Dạng 2: Tìm số phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của tập A gồm các phần tử có tính chất T.

Ví dụ 1.1.3. Cho A là tập hợp gồm 8 phần tử. Tìm số lớn nhất các tập con gồm 3 phần tử của A sao cho giao của hai tập bất kì trong các tập con này không phải là tập gồm hai phần tử.

Ví dụ 1.1.4. Trong một cuộc thi có 11 thí sinh tham gia giải 9 bài toán. Hai thí sinh bất kì giải chung với nhau không quá một bài. Tìm k lớn nhất để mọi bài toán có ít nhất k thí sinh giải được.

Để giải bài toán này, chúng ta thường thực hiện theo cách sau:
Đặt $\mid A \mid= k$, bằng các lập luận ta chứng minh $k < m$ $(k > m)$. Sau đó ta xây dựng một tập A' thỏa tính chất T và $\mid A' \mid= m$.

(ii) Bài toán cực trị hình học tổ hợp

Các bài toán cực trị tổ hợp (i), mà tập A gồm các đối tượng hình học thì thường được xếp vào dạng Bài toán cực trị hình học tổ hợp.

Ví dụ 1.1.5. Cho một đa giác đều 2007 đỉnh. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất thoả mãn tính chất: Trong mỗi cách chọn k đỉnh của đa giác, luôn tồn tại 4 đỉnh tạo thành một tứ giác lồi mà 3 trong số 4 cạnh của tứ giác là cạnh của đa giác đã cho (VMO 2007).

Ví dụ 1.1.6. Cho 2006 điểm phân biệt trong không gian, không có bốn điểm nào thẳng hàng. Số k gọi là số tốt nếu ta có thể điền lên mỗi đoạn thẳng nối hai điểm trong 2006 điểm đã cho một số tự nhiên không vượt quá k sao cho với mọi tam giác có ba đỉnh trong 2006 điểm đã cho thì có hai cạnh được điền hai số bằng nhau và cạnh còn lại thì được điền số lớn hơn. Tìm số tốt có giá trị nhỏ nhất (TST Việt Nam 2006).

Phương pháp giải các bài toán cực trị hình học tổ hợp này sẽ được luận văn trình bày chi tiết trong nội dung của Chương 2.

1.2 Một số nguyên lý, phương pháp giải toán thường gặp trong lời giải các bài toán hình học tổ hợp

1.2.1 Một số nguyên lý

Nguyên lý cộng

Quy tắc cộng: Nếu E_i $(i = 1, \ldots, k)$ với k sự kiện thỏa mãn:

(i) Không có hai sự kiện nào trong số chúng xảy ra đồng thời;

(ii) E_i có thể xảy ra theo n_i cách thì một trong k sự kiện có thể xảy ra theo $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$ cách.

Nguyên lý nhân

Quy tắc nhân: Nếu E_i $(i = 1, \ldots, k)$ với k sự kiện thỏa mãn. Và E_1 có thể xảy ra theo n_1 cách, E_2 có thể xảy ra theo n_2 cách (không phụ thuộc đến việc E_1 xảy ra như thế nào); E_3 có thể xảy ra theo n_3 cách (không phụ thuộc đến việc E_2, E_1 xảy ra như thế nào), $\ldots$, E_k có thể xảy ra theo n_k cách (không phụ thuộc đến $(k - 1)$ sự kiện trước xảy ra như thế nào), thì k sự kiện có thể xảy ra đồng thời theo $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots n_k$ cách.

Nguyên lý bù trừ

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này, ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Ta có thể phát biểu nguyên lý đếm này bằng ngôn ngữ tập hợp. Cho A_1, A_2 là hai tập hữu hạn, khi đó:

$$\mid A_1 \bigcup A_2 \mid = \mid A_1 \mid + \mid A_2 \mid - \mid A_1 \cap A_2 \mid$$

Từ đó, với ba tập hữu hạn A_1, A_2, A_3 ta có:

$$\mid A_1 \cup A_2 \cup A_3 \mid = \mid A_1 \mid + \mid A_2 \mid + \mid A_3 \mid - \mid A_1 \cap A_2 \mid - \mid A_1 \cap A_3 \mid - \mid A_3 \cap A_2 \mid +$$

$$\mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \mid .$$

Và bằng quy nạp, với k tập hữu hạn $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ta có:

$$\mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \mid = N_1 - N_2 + N_3 - \cdots + (-1)^{k-1} N_k.$$

Trong đó N_m $(1 \leq m \leq k)$ là tổng phần tử của tất cả các giao m tập lấy từ k tập đã cho, nghĩa là:

$$N_m = \sum_{1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq k} \mid A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m} \mid$$

Bây giờ, ta đồng nhất tập A_m $(1 \leq m \leq k)$ với tính chất A_m cho trên tập vũ trụ hữu hạn U nào đó và đếm xem có bao nhiêu phần tử của U sao cho không thỏa mãn bất kỳ một tính chất A_m nào. Gọi $\overline{N}$ là số cần đếm, N là số phần tử của U. Ta có:

$$\overline{N} = N - \mid A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \mid = N - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^k N_k.$$

Trong đó N_m là tổng các phần tử của U thỏa mãn m tính chất lấy từ k tính chất đã cho.

Nguyên lý cực hạn

NL 1: Trong tập hợp hữu hạn và khác rỗng các số thực luôn có thể chọn được số bé nhất và số lớn nhất.

NL 2: Trong một tập hợp khác rỗng các số tự nhiên luôn luôn có thể chọn được số bé nhất.

Nguyên lý trên được gọi là nguyên lý cực hạn. Nhờ nguyên lý này ta có thể xét các phần tử mà một đại lượng nào đó có giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất, chẳng hạn:

- Xét đoạn thẳng có độ dài lớn nhất (nhỏ nhất) trong một số hữu hạn các đoạn thẳng.
- Xét góc lớn nhất (nhỏ nhất) trong một số hữu hạn góc.
- Xét đa giác có diện tích hoặc chu vi lớn nhất (nhỏ nhất) trong một số hữu hạn các đa giác.
- Xét khoảng cách lớn nhất (nhỏ nhất) trong một số hữu hạn khoảng cách giữa hai điểm hoặc khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.
- Xét các điểm là đầu mút của một đoạn thẳng, xét các điểm ở phía trái nhất hoặc ở phía phải nhất của một đoạn thẳng (giả thiết là đoạn thẳng đó nằm ngang).

Nguyên lý Dirichlet

Nguyên lý Dirichlet do nhà toán học người Đức nổi tiếng là Dirichlet đề xuất từ thế kỷ XX đã được áp dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm trong nhiều bài toán tổ hợp. Nguyên lý này được phát triển từ một mệnh đề rất đơn giản gọi là nguyên lý "nguyên lý quả cam" hay là nguyên lý "chuồng chim bồ câu": Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ngăn chuồng thì chắc chắn có ít nhất một ngăn có nhiều hơn một con chim. Dạng đơn giản nhất của nguyên lý Dirichlet, hay còn gọi là nguyên lý nhốt thỏ vào lồng, như sau: Nếu nhốt $n+1$ thỏ vào n lồng thì tồn tại một lồng có ít nhất 2 con thỏ. Tổng quát: Nếu $n > km$ (n, k, m) là các số tự nhiên) thì khi nhốt n con thỏ vào m lồng sẽ tồn tại một lồng chứa ít nhất $k+1$ thỏ. Thật vậy, giả sử lồng nào cũng có không quá k thỏ thì m lồng có không quá mk thỏ, ít hơn n thỏ, vô lý.

1.2.2 Phương pháp đếm hai lần (Double Counting)

Ý tưởng của phương pháp đếm hai lần: Với bài toán đếm, nếu ta sử dụng hai phương pháp đếm khác nhau thì kết quả phải trùng nhau.

Ví dụ 1.2.1. [3] Người ta kẻ n đường thẳng, trong đó không có hai đường thẳng nào song song với ba đường thẳng nào đồng quy. Hỏi n đường thẳng đó chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền.

Chứng minh. Với $n = 1$ chia mặt phẳng thành 2 miền,

Với $n = 2$ chia mặt phẳng thành 4 miền,

Với $n = 3$ chia mặt phẳng thành 7 miền.

Gọi S_n là số miền con chia bởi n đường thẳng. Suy ra:

$$S_1 = 2, S_2 = 4 = 1 + \frac{2(2+1)}{2}, S_3 = 1 + \frac{3(3+1)}{2} = 7, \dots$$

Từ đó ta đi tới chứng minh bằng quy nạp: $S_n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Giả sử đúng với $n = k$. Suy ra $S_k = 1 + \dfrac{k(k+1)}{2}$. Khi đó $k+1$ đường thẳng. Vậy đường thẳng $k+1$ cắt k đường thẳng trước tại thành $k+1$ miền mới. Suy ra:

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = 1 + \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Vậy đẳng thức đúng. □

Ví dụ 1.2.2. Cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ trên cùng mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng, không có 4 điểm nào tạo thành hình bình hành. Gọi $I_1, I_2, \ldots, I_m$ là tất cả các trung điểm của các đoạn tạo thành từ các đoạn A_iA_j $(1 \leq i < j \leq n)$. Gọi N là tổng độ dài của mọi đoạn thẳng với hai đầu mút là A_iA_j. M là tổng độ dài của mọi đoạn thẳng với d là hai đầu mút. Gọi các đỉnh của đa giác đều đã cho là: I_i, I_j. Chứng minh rằng:

$$M \leq \frac{n^2 - 3n + 2}{4} \cdot N.$$

Chứng minh. Ta có M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA thì ta có:

$$MN + NP + PM = \frac{1}{2}(AB + BC + CA). \tag{1}$$

Với M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, DA, AC, BD thì ta có:

$$MN + PQ + RS \leq \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA + AC + BD). \tag{2}$$

Dễ thấy (1) là hiển nhiên vì theo tính chất đường trung bình của tam giác còn (2.3.1) ta dựa vào nhận xét sau:

$$PQ \leq PK + KQ = \frac{1}{2}(AB + CD). \tag{3}$$

Do đó dựa vào (1) và (2.3.1) là đúng. Khi đó, với n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta thiết lập các tam giác và tứ giác, rồi lập ra mọi đẳng thức (1) và mọi bất đẳng thức (2.3.1) và tương ứng cộng vế với vế ta thu được bất đẳng thức (3).

Bây giờ với bất đẳng thức (3) ta xét các giá trị của hai vế theo cách khác nhau là M.

Mỗi đoạn I_iI_j thuộc vào $n-2$ tam giác và C_{n-2}^2 tứ giác nên vế phải (3) bằng:

$$\frac{1}{2}(n - 2 + C_{n-2}^2) \cdot N = \frac{n^2 - 3n + 2}{4} \cdot N.$$

Như vậy ta sẽ thu được: $M \leq \dfrac{n^2 - 3n + 2}{4} \cdot N$. Vậy các đa giác đều được lát mặt phẳng chỉ có tam giác đều, hình vuông và lục giác đều. □